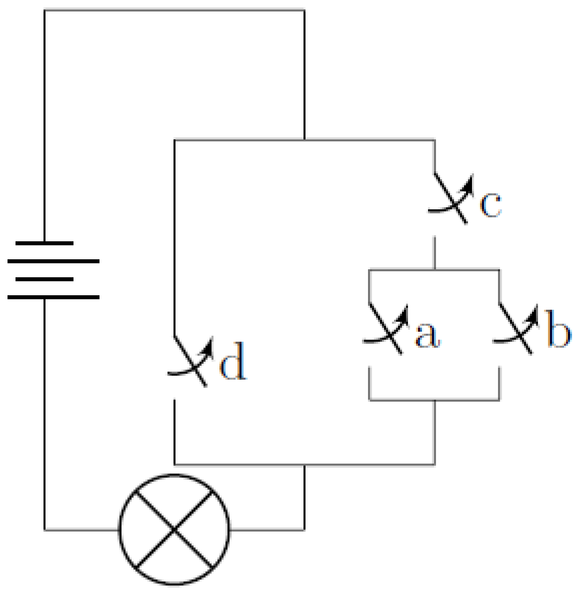
Aufgabe 1 – Kontaktlogik

a) Analysieren Sie die dargestellte Schaltung und geben Sie an, bei welchen Schalterstellungen die Lampe leuchtet. Erstellen Sie dazu eine Wahrheitstabelle in Abhängigkeit der Stellung (an/aus) der Schalter a, b, c und d.
Hinweis: 1 = Schalter geschlossen, 0 = Schalter offen; die Lampe leuchtet (=1), wenn der Stromkreis geschlossen ist.



b) Bestimmen Sie anschließend den booleschen Ausdruck, der das Verhalten der Schaltung beschreibt. Verwenden Sie dabei die booleschen Operatoren (UND, ODER, NICHT) bzw. deren Symbole (·, +, ¬).

a	b	c	d	Lampe L
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

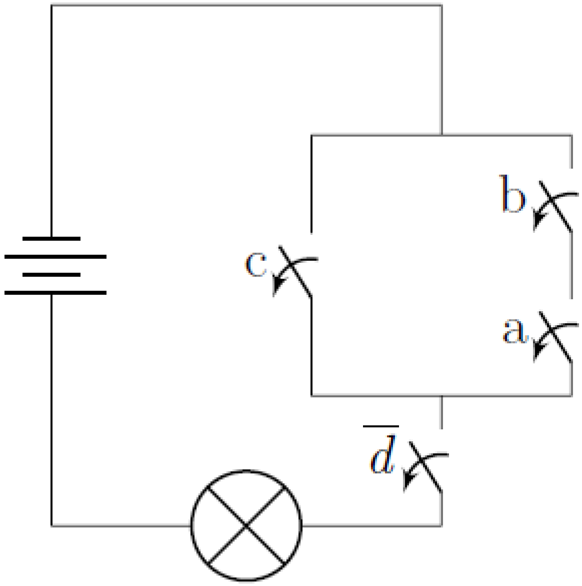
c)

Aus der Schaltung: linker Zweig **d** liegt parallel zum rechten Zweig, der aus **c** in Serie mit (**a** ∨ **b**) besteht.

Übliche Schreibweise:

$$L = d + c \cdot (a + b) = d + ac + bc$$

a) Analysieren Sie auch die dargestellte Schaltung anhand einer Wahrheitstabelle in Abhängigkeit der Stellung (an/aus) der Schalter a, b, c und d.



b) Bestimmen Sie anschließend den booleschen Ausdruck, der das Verhalten der Schaltung beschreibt. Verwenden Sie dabei die booleschen Operatoren (UND, ODER, NICHT) bzw. deren Symbole (·, +, ¬).
Achtung: Der Schalter d ist invertiert, das heißt also wenn er geschlossen wird, ist die Leitung unterbrochen.

a	b	c	d	Lampe L
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Die Lampe leuchtet nur, wenn

- **d geöffnet** ist (d = 0 → ¬d = 1) **und gleichzeitig**
- **c** geschlossen **oder** beide Schalter **a und b** geschlossen sind.

$L = \neg d \cdot c + \neg d \cdot a \cdot b = \neg d \cdot (c + (a \cdot b))$

Aufgabe 2 – Vereinfachen

Vereinfachen Sie folgende Terme unter Verwendung der Rechenregeln in der booleschen Algebra aus der Vorlesung:

a) $a \cdot (a \cdot 1)$ | $a \cdot 1 = a$
$= a \cdot a$ | $a \cdot a = a$
$= a$

b) $\neg(\neg(a \cdot b) \cdot \neg(a \cdot b))$ | Umformung mit De Morgans Gesetz
$= \neg((\neg a + \neg b) \cdot (\neg a + \neg b))$ | doppelten Term entfernen, denn a·a=a
$= \neg(\neg a + \neg b)$ | Umformung mit De Morgans Gesetz
$= \neg\neg a \cdot \neg\neg b$ | -(-a)=a
$= a \cdot b$

c) $(a \cdot b) + (a \cdot c) + (a \cdot d)$ | a vor die Klammer ziehen
$= a \cdot (b + c + d)$

d) $a + (\neg b \cdot \neg(a + \neg b + c))$ | Umformung mit De Morgans Gesetz
$= a + (\neg b \cdot (\neg a \cdot b \cdot \neg c))$ | ausklammern
$= a + (\neg b \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg c)$ | $\neg b \cdot b = 0$, das heißt ist unmöglich
$= a$

e) Zeigen Sie durch Umwandlung:
$(a + \neg(b \cdot a)) \cdot (c + (d + c)) = c + d$
$= (a + \neg(b \cdot a)) \cdot (c + (d + c))$ | Umformung mit De Morgans Gesetz
$= (a + (\neg b + \neg a)) \cdot (c + (d + c))$ | Assoziativgesetz
$= (a + (\neg a + \neg b)) \cdot (c + (d + c))$ | Kommutativgesetz
$= ((a + \neg a) + \neg b) \cdot (c + (d + c))$ | Komplementärgesetz
$= (\text{true} + \neg b) \cdot (c + (d + c))$ | Kommutativgesetz
$= (\neg b + \text{true}) \cdot (c + (d + c))$ | Null-/Einsgesetz („Neutralität“)
$= \text{true} \cdot (c + (d + c))$ | Kommutativgesetz
$= (c + (d + c)) \cdot \text{true}$ | Identitätsgesetz
$= c + (d + c)$ | Kommutativgesetz
$= c + (c + d)$ | Assoziativgesetz
$= (c + c) + d$ | Idempotenzgesetz
$= c + d$

f) Zeigen Sie durch Erstellen einer Wahrheitstabelle:
$\left(a + \neg(\mathrm{b} \cdot a)\right) \cdot \left(\mathrm{c} + (\mathrm{d} + \mathrm{c})\right) = \mathrm{c} + \mathrm{d}$

a	**b**	**c**	**d**	$\left(\boldsymbol{a} + \neg(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{a})\right) \cdot \left(\mathbf{c} + (\mathbf{d} + \mathbf{c})\right)$	**(c+d)**
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1